Vol. XV, Nº 2, Diciembre (2007)
Educación e Historia: 129–144

**Matemáticas:**
**Enseñanza Universitaria**


# Segmentos de la historia: la función logarítmica

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Jeannette Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Recibido May. 3, 2007 Aceptado Agos. 17, 2007

**Abstract**

Historians have studied the origin, development and consolidation of the logarithmic function from different viewpoints. This article exhibits some of the mathematicians conceptions throughout history. It starts with Napier and Bürgi arithmetic-geometry approach; follow by showing how the logarithm relates to series and curves, in order to incorporate it into the transcendental functions world and link it with the exponential function.

**Keywords:** logarithm, progression, logarithmic function, exponent, history

**MSC(2000):** Primary: 9703, Secondary: 01 A45, 01A50

**Resumen**

El nacimiento, desarrollo y consolidación del concepto de función logarítmica, que ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista por distintos historiadores, puede ser dividido en diferentes etapas. A lo largo de este artículo, se muestran las diferentes concepciones que han tenido los matemáticos a través de la historia. Así, inicialmente, se muestran las concepciones aritmético-geométricas que tuvieron Napier y Bürgi alrededor del concepto de logaritmo. Posteriormente, se relaciona este concepto con curvas y series para poco a poco ir formando parte del mundo de las funciones transcendentes y finalmente relacionarlo con la función exponencial.

**Palabras y frases claves:** logaritmo, progresión, exponente, función logarítmica, historia.

## 1 Introducción

La invención de los logaritmos se data a principios del siglo XVII y se considera hija de la preocupación de los matemáticos del siglo XVI por las técnicas prácticas de cálculo, siendo un fruto tardío de éstas [1]. En relación con dicha invención, Bell (2000), destaca el papel que ésta ejerció en aquel momento, las aplicaciones que tuvo y las facilidades que concedió a los matemáticos:

> La invención de los logaritmos, contemporánea a Kepler (1571-1630), habría de reducir su labor sobrehumana a proporciones más manejables. La historia de los logaritmos es otra epopeya de la perseverancia que no cede más que ante la de Kepler. El barón Napier o Neper de Merchistorum (escocés, 1550-1617), en los ratos de ocio que le dejaban sus deberes de terrateniente y su vana preocupación de demostrar que el Papa reinante era el Anticristo, inventó los logaritmos.

> Si recordamos que Napier murió antes de que Descartes (1596 - 1650) introdujera la notación, $n$, $nn$, $n^3$, ... para las potencias ([9], p.14), no nos maravillaremos tanto de que le costara no menos de veinte años razonar las propiedades y la existencia de los logaritmos [2].

Los pasos anteriores y posteriores a esta invención, se pueden organizar en etapas, establecidas con el fin de centrar la mirada en los cambios significativos que determinan cada nuevo " escalón" en su evolución.

## 2 Antecedentes: las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas

El germen sobre el que se construye el concepto de logaritmo, se puede encontrar en un trabajo de Arquímedes (aprox. 287-212 a.C.) relativo a los números gigantescos, donde se menciona que la suma de los «órdenes» de varios números (equivalentes a sus exponentes tomando la base $100_1000,000$) corresponde al «orden» del producto de dichos números [25]. En su obra titulada *Psammites* (más conocida como «El Arenario») Arquímedes llegó a la conclusión que para llenar el Universo Aristarco no serían necesarios más de $10^{63}$ granos de arena.

> Cuando varios números están en proporción continua a partir de la unidad, y algunos de estos números se multiplican entre si, el producto estará en la misma progresión, alejado del más grande de los números multiplicados tantos números como el más pequeño de los números multiplicados lo está de la unidad en la progresión, y alejado de la unidad la suma menos uno de los números de lugares que los números multiplicados están alejados de la unidad. (Arenario, citado por [19], p.1)

Posteriormente, en la *Arithmética Integra* (1544) de Stifel (1487-1567), se establece que los términos de la progresión geométrica[1]:

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$$

se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... ,

La multiplicación de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética[2], y la división de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la diferencia de los correspondientes términos en la

[1] Por comodidad para el lector se va a utilizar en el texto la notación actual relativa a los diferentes conceptos matemáticos.

[2] Esta propiedad de los exponentes fue expuesta para números naturales en el libro IX de los Elementos de Euclides [20], para fracciones positivas se empieza a usar en el siglo XIV a partir de Nicolas de Oresme; en los siglos XV, XVI y XVII comienzan a usarse con exponentes negativos y fraccionarios en general; y finalmente, Euler es quien los va a extender a los irracionales.

progresión aritmética. [18], [27]. Esta observación aunque había sido hecha anteriormente por Nicolas Chuquet (1445-1488) en *Le Triparty en la science des nombres* (1484), establece estas reglas sólo para las potencias de 2 con exponentes de 0 a 20. Stifel sigue trabajando con potencias de dos pero amplia a los exponentes fraccionarios y negativos [11]. Así, la división de $r^2$ por $r^3$ produce $r^{-1}$ qué corresponde al término $-1$. A pesar de advertir las posibilidades de estos hallazgos, Stifel manifestaba: “ se podría escribir un libro totalmente nuevo sobre las maravillosas propiedades de estos números, pero he de resignarme y pasar por él con ojos cerrados”. (Citado por [5], p. 177).

Esta propiedad fue importante en la época, puesto que simplificaba los cálculos que tenían que hacerse con números grandes, fundamentalmente en relación con la astronomía, rebajando de esta forma en un grado cada una de las operaciones aritméticas.

Además, en el siglo XVI, comenzaron a popularizarse diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa para simplificar los cálculos astronómicos. Entre ellas estaba el grupo de fórmulas conocidas como «Reglas de Prosthaphaeresis[3]», es decir, permitían convertir el producto de funciones circulares en una suma o diferencia y, como se describe más adelante, tuvieron repercusión en el desarrollo de los logaritmos. Al menos una de las reglas de Prosthaphaeresis, era ya conocida por los árabes. Concretamente se le adjudica a Ibn-Yunus (aprox. 1008) la introducción de la fórmula $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ ([3], p. 311), ([22], p.140).

## 3 Los inicios del concepto: una base aritmética con un fundamente geométrico

La invención de Napier (1550-1617) del logaritmo fue más que el fruto de una elaboración aritmética del estilo de las de Stifel, el resultado del estudio de un problema de mecánica, para el que se construyó un modelo adecuado que permitiera conjugar ([8], p. 341) ideas del mundo aditivo y el multiplicativo.

Cabe anotar el interés de Napier por resolver los problemas astronómicos de la época, para lo que utilizó las recién descubiertas Reglas de Prosthaphaeresis. Estas reglas se habían adoptado en los observatorios astronómicos, incluido el de Tycho Brahe (1546-1601) en Dinamarca, de donde llegó la noticia a Napier en Escocia, que al parecer le animó a redoblar esfuerzos y a publicar en 1614 su obra *Mirifici logarithmorum*[4] *canonis descriptio* («Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos») en la que utiliza por primera vez el término logaritmo y que contenía solamente una introducción y una guía para el cálculo de los logaritmos.

Más tarde se publicó una obra póstuma de Napier titulada *Mirifici logarith-*

[3] Palabra griega que significa suma y resta.

[4] El término logaritmo acuñado por Napier proviene de « logos », razón y “ aritmos”, número, y hace referencia al “ número de la razón”, es una medida del “ numero” de veces que la “ acción razón” ha ocurrido.

*morum canonis constructio* (1619) en la que aparecen las tablas de Napier que fueron recibidas con entusiasmo por astrónomos[5] y navegantes ya que convertía los tediosos cálculos de multiplicaciones y divisiones en simples sumas y restas. Hay que señalar que en la época de Napier todavía no se había desarrollado las potencias con exponente fraccionario ni la notación exponencial. Tampoco estaba extendido el uso del punto decimal para separar las cifras decimales, de hecho fue Napier, y su uso sistemático del punto decimal, el responsable de la generalización de su uso ([12], p.143).

Napier realizaba los cálculos astronómicos utilizando la trigonometría esférica por lo que trató con los logaritmos de senos y, como era costumbre en la época, siguiendo a Regiomontanus[6] (1436-1476) usó semicuerdas de un círculo cuyo radio contenía $10^7$ unidades. La idea clave de la obra de Napier era que para conseguir que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estuvieran muy próximas unas a otras, era necesario tomar esta razón muy próxima a uno; así, los huecos entre los sucesivos términos de la progresión se mantenían pequeños. Napier decidió tomar como razón el número $1-10^{-7} = 0{,}9999999$; los términos de la progresión de potencias enteras crecientes así formada, están ciertamente muy próximos entre sí, de hecho, demasiado próximos. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplicó Napier todas las potencias por $10^7$.

Entonces, si $N = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^L$, $L$ será el «logaritmo» de Napier del número $N$. Edwards (1979, 144) denota este logaritmo (para distinguirlo del logaritmo actual) como Nog, por lo tanto, $L = \text{Nog}\ N$. De acuerdo con esta definición, se cumple que, el logaritmo de $10^7$ será 0, el logaritmo de $10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right) = 9999999$ será 1, etc y Nog $N$ decrece a medida que $N$ crece en contraposición con lo que ocurre con los logaritmos actuales. Además si $N' = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{L'}$, se cumple que:

$$\frac{N}{N'} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L-L'}$$

luego la diferencia entre los logaritmos de $L$ y de $L'$ sólo depende de la razón entre $L$ y $L'$ y se puede concluir que si $N_1, N_2, \ldots, N_n$ es una progresión geométrica entonces la sucesión de logaritmos correspondiente es una progresión geométrica.

Además, si se dividen tanto los números como los logaritmos por $10^7$, se tiene prácticamente un sistema de logaritmos de base $\dfrac{1}{e}$, puesto que $\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^L$ no se

[5]Kepler utilizó las tablas de Napier para el descubrimiento de su tercera ley de los planetas.

[6]Regiomontanus, como el resto de los astrónomos del siglo XV, realizó tablas de funciones trigonométricas, concretamente de tangentes. Para evitar el uso de fracciones, se acostumbraba a utilizar un círculo básico de valor muy grande que recibía el nombre de sinus totus, concretamente él utilizaba uno de radio de $10^7$.

diferencia[7] ya demasiado del $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ ([3], p. 396).

Estudiemos detenidamente esta visión aritmética del logaritmo:

- Se elige un número, $1 - 10^{-7}$ , " próximo" a 1
- Se construye la progresión geométrica de razón $1 - 10^{-7}$:
$$(1-10^{-7})^0,\ (1-10^{-7})^1,\ (1-10^{-7})^2, \ldots,\ (1-10^{-7})^L, \ldots$$
que es una progresión decreciente de términos " próximos" a 1.
- Para reducir la aparición de decimales en la progresión anterior, se multiplica cada término de la sucesión por $10^7$ (a los términos de la nueva progresión geométrica se les llama números de Napier: $N$)
$$10^7(1-10^{-7})^0,\ 10^7(1-10^{-7})^1,\ 10^7(1-10^{-7})^2, \ldots,\ \underbrace{10^7(1-10^{-7})^L, \ldots}_{N}$$
- Se hace la asignación:
$$N \to \operatorname{Nog} N = L$$
- Así:
$$0 = \operatorname{Nog} 10^7, \quad 1 = \operatorname{Nog} 10^7(1-10^{-7}); \quad \ldots; L = \operatorname{Nog} 10^7(1-10^{-7})^L$$
- Si se dividen $N$ y $L$ por $10^7$, la correspondencia:
$$\frac{N}{10^7} \to \frac{\operatorname{Nog} N}{10^7} = \frac{L}{10^7}$$
es una correspondencia similar a la correspondencia:
$$\frac{N}{10^7} \to \operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)$$
ya que:

[7] En realidad, Euler hizo el razonamiento en sentido inverso. La primera vez que utilizó el número $e$ fue en un manuscrito datado en 1727-28 cuando contaba 20 o 21 años de edad ([4], p.3), y publicado póstumamente en 1862 en el que escribía: " El número cuyo logaritmo es la unidad será escrito como $e$, cuyo valor es 2'7182817..." ([24], 95). Una vez definido el número $e$ entonces demuestra en su *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) que, en general, el $e^x = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ " Erit enim $e^x = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$", y que, en particular, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\text{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right) = \frac{10^7\text{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)}{10^7} = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{10^7(1-10^7)^L}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7}$$
$$= \frac{L\cdot\text{Log}_{\frac{1}{e}}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \to \frac{L\cdot\text{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e}\right)}{10^7} = \frac{L}{10^7}$$

En cuanto a la versión geométrica del concepto de logaritmo, Napier lo explica de la siguiente manera:

> Sea el segmento AB y una semirrecta CDE dados en la figura 1. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB ([3], p. 397).

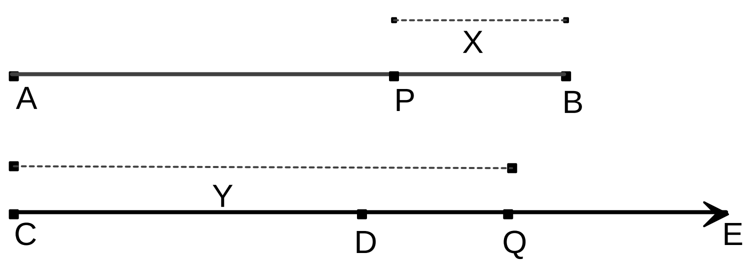


Figura 1: Representación de la construcción de Napier

Veamos que esta definición geométrica es acorde con la numérica. Para ello, consideremos, según nuestra notación actual, que $y = \log x$ y además utilicemos nuestros conocimientos actuales para realizar dicha comprobación. Supongamos que AB $= 10^7$, que la velocidad inicial (en A) es $10^7$ y que la constante de proporcionalidad es 1. Por la definición del movimiento realizada por Napier, tendremos las siguientes igualdades relativas a la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = -x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = 10^7$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{10^7}{-x} = -\frac{10^7}{x}, \text{ o lo que es lo mismo, } \frac{dy}{-10^7} = \frac{dx}{x}$$

integrando (respecto a $x$):

$$\frac{y}{-10^7} = \ln x + \ln c = \ln cx$$

y despejando la variable $y$:

$$y = -10^7 \ln (cx).$$

Utilicemos ahora las condiciones iniciales, cuando $x = 10^7$, $y = 0$, luego,

$$0 = -10^7 \ln (c \cdot 10^7),\ 0 = \ln (c \cdot 10^7),\ 1 = (c \cdot 10^7),\ \frac{1}{10^7} = c$$

Así,

$$y = -10^7 \ln \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

con lo cual la igualdad anterior establece la relación entre el logaritmo de Napier y el logaritmo natural. Utilizando la relación entre logaritmos de diferentes bases, obtenemos que:

$$y = \frac{-\,10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)}{-1},\ y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

en definitiva:

$$\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right), \text{ siendo } y = \operatorname{Nog} x$$

Esto es, si las distancias PB y CQ se dividen por $10^7$, la definición geométrica del logaritmo de Napier conduce al sistema de logaritmos[8] de base $\frac{1}{e}$.

> No es necesario decir que Napier calculó sus tablas numéricamente y no geométricamente, desde luego, tal como indica la palabra «logaritmo» inventada por él. Al principio Napier llamó a sus índices de potencias o exponentes «números artificiales», pero más tarde se decidió por la palabra compuesta de las dos palabras griegas *logos* (o razón) y *arithmos* (o número). Napier no pensaba, en una base para su sistema, pero no obstante sus tablas venían

[8]En el libro de Edwards ([12], p.153) se propone como ejercicio demostrar que si se divide $x$ por $10^7$, el sistema de logaritmos que propone Napier es un sistema de logaritmos de base $1/e$.

> calculadas por medio de multiplicaciones repetidas, equivalentes a elevar a potencias el número 0.9999999. Obviamente la potencia (o número) disminuye según el índice (o logaritmo) aumenta, lo cual era de esperar ya que estaba utilizando implícitamente como base $\frac{1}{e}$ que es menor que 1 ([3], p. 397).

Además de que Napier no utilizaba una base para su sistema de logaritmos, una de las diferencias más notable entre sus logaritmos y los nuestros consiste en el hecho de que su logaritmo de un producto (o de un cociente) no es igual, en general, a la suma (o la diferencia) de los logaritmos [8]. A pesar de esto, Napier consiguió construir su sistema con ciertas propiedades que permitieron la simplificación de los cálculos, especialmente en el caso de los productos y cocientes.

Con motivo del tricentenario de la invención de Napier, se publicó un volumen [17] de artículos que discutían este hecho y cómo se había evolucionado en el lapso de 300 años. Entre los artículos está el escrito por Moulton [21], quien propuso tres fases en la invención de logaritmos: primero, Napier identificó la correspondencia entre una sucesión geométrica y aritmética. Segundo, introdujo " una representación geométrica de los manejos aritméticos originales". Tercero, Napier se dio cuenta que si los pares de términos de la progresión geométrica tienen la misma razón, entonces los términos correspondientes en la aritmética se encontraban igualmente distanciados.[9]

Casi al mismo tiempo que Napier, en Suiza Jobst Bürgi (1552-1632) desarrollaba ideas muy parecidas. Existen referencias de que a Bürgi la idea de logaritmo se le ocurría seis años antes; sin embargo, no publicó sus resultados hasta 1620, en Praga, en su obra titulada *Arithmetishe und geometrische Progress-Tabulen.*

Las motivaciones que impulsaron su obra (Boyer, 2003) fueron muy parecidas a las de Napier. Ambos partieron de las propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas impulsados probablemente por las reglas de prostafairesis. La noción de «base» no existió tampoco en el sistema de Bürgi, y $\log 1 = 0$ era inadmisible en el sistema de los coinventores de los logaritmos. Bürgi era maestro de reparaciones de relojes y de instrumentos astronómicos, trabajó en Praga en el observatorio astronómico con Kepler (1571-1630) ayudándole en las observaciones y cálculos. Para la simplificación de cálculos, durante ocho años (1603-1611) confeccionó su tabla de logaritmos sobre la base de una tabla del tipo[10] de Stevin (1548-1620).

Para obtener un paso lo suficientemente pequeño en la tabla, Bürgi tomó como razón para su progresión geométrica un número mayor que 1, el número $r = 1 + \frac{1}{10^4}$. La tendencia a no encontrarse, en lo posible, fracciones le obligó a

[9] Se puede consultar una ilustración de este acercamiento que introdujo Katz [16].

[10] En estas tablas se comparan las sucesiones de potencias de un número con la sucesión de exponentes. Las tablas de Stevin eran de tantos por ciento, o sea, calculaba el valor de los números $a(1+r)^n$ usando diferentes tablas para diversos valores de $r$ (tantos por ciento) : $r = 0{,}05$, $r = 0{,}04$, etc. Cuanto menor es $r$, tanto menor es la desproporción entre los valores obtenidos. ([3], p.141).

introducir un factor complementario; $a = 10^8$. Los valores de la progresión geométrica obtenida $g_k = 10^8\left(1+\dfrac{1}{10^4}\right)^k$ $(k = 0, 1, 2, 3\ldots)$ los puso en correspondencia con los términos de la progresión aritmética: $0, 10, 20, 30, \ldots$ y obtuvo dos series de valores:

$$10^8,\ 10^8(1+10^{-4}),\ 10^8(1+10^{-4})^2,\ 10^8(1+10^{-4})^3,\ \ldots$$

$$0 \qquad\qquad 10 \qquad\qquad 20 \qquad\qquad 30$$

Los números de la serie de abajo fueron impresos en pintura roja y se denominaban rojos; los números de la serie de arriba, en pintura negra, se denominaban negros. De esta forma, en la tabla de Bürgi los números rojos constituían los logaritmos de los negros divididos entre $10^8$ con base $\sqrt[10]{1,0001}$. Como Bürgi orienta su tabla a los números rojos, será una tabla de antilogaritmos, lo que no cambia la esencia de la cuestión. Entre las diferencias de los dos acercamientos al concepto de logaritmo, hemos visto que Napier eligió al principio $\log 10^7 = 0$, mientras que Bürgi parte de $\log 10^8 = 0$. Además, la relación $\log m < \log n$ si $m > n$, es cierta en el sistema de Napier, mientras en el de Bürgi se verifica $\log m > \log n$si $m > n$, lo que permite afirmar que el sistema del relojero Bürgi estaba más cerca del nuestro que el de Napier [7].

## 4 Generalización del logaritmo como exponente de las potencias

La publicación en 1614 del sistema logarítmico fue acogida y aceptada con rapidez. Uno de los admiradores más entusiastas fue Henry Briggs (1561-1639), primer Savilian Profesor de Geometría en Oxford, que al año siguiente de esta publicación, durante una visita a Napier, discutió con éste sobre posibles modificaciones del método de logaritmos. Briggs propuso utilizar potencias de diez, y Napier confirmó que ya había pensado en ello y estaba de acuerdo. Napier, en cierto momento, había sugerido una tabla basada en las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$, para evitar las fracciones, pero al final estos dos personajes llegaron a concluir que lo más conveniente sería que el logaritmo de uno fuese cero y que el logaritmo de diez fuese uno. Sin embargo, Napier fallece en 1617, sin llevar a la práctica estas ideas.

Así pues, Briggs construye la primera tabla de logaritmos llamados logaritmos vulgares o de Briggs y en 1617 publicó su obra *Logarithmorum chilias prima*, de los logaritmos de 1 hasta 1.000, extendiendo luego sus tablas en su *Aritmética logarítmica* hasta 100.000 siempre con catorce cifras decimales. En lugar de tomar potencias de un número próximo a 1, como había hecho Napier, Briggs parte de la igualdad $\log 10 = 1$ y después va calculando logaritmos tomando raíces y haciendo uso de la igualdad $\log 10^n x = n + \log x$. De esta forma apareció la primera tabla de logaritmos decimales o logaritmos vulgares. Es importante hacer notar que, a partir de ese momento, ya se podía trabajar con los logaritmos exactamente como lo hacemos hoy, puesto que las tablas de Briggs tenían todas las propiedades usuales de los logaritmos, además, los nombres «característica» y «mantisa» se derivan del libro la *Arithmetica Logarítmica* de Briggs (1624).

Mientras Briggs realizaba sus tablas, el profesor de matemáticas inglés John Speidell, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo, a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (o neperianos), publicados en su obra *New Logarithmes* (1619). Como complemento a las tablas, el inventor de la «regla de cálculo», William Oughtred (1574 -1660) enunció de forma explicita, hacia 1650, las siguientes propiedades de los logaritmos:

$$\log mn = \log m + \log n, \qquad \log \frac{m}{n} = \log m - \log n, \qquad \log x^n = n\log x.$$

Si bien la definición de logaritmos entendidos como los exponentes de las potencias que representan los números con una base fija, como en el esquema de Briggs, se convirtió en un acercamiento común, esta definición no se utilizó en los inicios del siglo XVII porque no se usaban los exponentes fraccionarios e irracionales. La primera exposición sistemática de definición se presentó en 1742, cuando William Jones (1675-1749) la incluye en la introducción de *Table of Logarithms* de William Gardiner. Sin embargo, es importante tener en cuenta que Euler (1707-1783) ya había definido logaritmos como exponentes en 1728.

En su manuscrito inédito (*Opera Póstuma*, II, 800-804), introduce por primera vez la definición de logaritmo de un número positivo como el exponente al cual hay que elevar la potencia, cuya base es la elegida para que dé el número prefijado [18]. Euler utiliza esta definición para la resolución de problemas relativos a la variación de interés compuesto y de crecimiento de la población que incluye al final del capítulo VI de su *Introductio*. De esta forma resuelve el problema propuesto por Descartes en su *Géométrie* (1637) [6], en torno a las curvas cuyas ordenadas $y\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ crecen con las abscisas $x+nb$ [14, p.189]. Euler fue el primero que vio en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos [26]. Su contribución no se limitó a su definición en términos de exponentes, sino que en 1747 escribió a D'Alembert (1717-1783) explicando el status de los logaritmos de números negativos.

## 5 Relación del logaritmo con curvas y series

### 5.1 El logaritmo como área bajo una curva

En referencia a los logaritmos, gradualmente se introdujeron variaciones ([18], p.345) sobre la idea de Napier siendo identificada, como etapa esencial del desarrollo matemático del concepto, su relación con la hipérbola [19]. Para llegar a esta relación hay que tener en cuenta el trabajo del jesuita Gregoire de Saint-Vincent

(1584-1667), quien había acabado la redacción de un " *Opus geometricorum quadrature circuli et sectionum coni*" (1630), en el cual pretendía haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola. Esta obra no fue publicada hasta 1647, y aunque fue un fracaso en cuanto a la cuadratura del círculo, puso en evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos.

Fermat (1601-1665) había calculado en 1629 el área bajo la curva $y = x^n$ entre dos valores $x = 0$ y $x = a$ subdividiendo el subintervalo $[0, a]$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando como abscisas los puntos correspondientes a la progresión geométrica $a, aE, aE^2, \ldots$ siendo $E$ un número menor que 1. En estos puntos considera las ordenadas correspondientes y aproxima el área de la curva mediante rectángulos circunscritos. Las áreas de estos rectángulos forman una progresión geométrica: $a^n(a\,E - a)$, $a^n E^n(aE^2 - aE), \ldots$ La suma de los infinitos términos de esta progresión es:

$$\frac{a^{n+1}(1+E)}{1-E^{n+1}} \text{ o, } \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

a medida que los rectángulos se hacen más pequeños, es decir, $E$ tiende a 1, la cantidad anterior nos da $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

Fermat había demostrado ésto para exponentes de $x$ naturales, fraccionarios y negativos, excepto cuando $n = -1$ que es el caso de la hipérbola. Gregory de Saint Vincent resolvió este problema. Él se apoya sobre el hecho de que, cuando se toman abscisas tales que los intervalos que se forman crecen en progresión geométrica y se levantan las ordenadas correspondientes, entonces él área bajo la curva de dos abscisas sucesivas son iguales. Luego a medida que crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva crece aritméticamente[11]. Por lo tanto, la función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos ($L(xy) = L(x) + L(y)$) ya que:

$$A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$$

por ser iguales las áreas entre abscisas en progresión geométrica, y se puede considerar que " se parece" a los logaritmos.

La relación del cálculo del área bajo la hipérbola con los logaritmos no se puede considerar estrictamente de Gregoire de Saint - Vincent; al parecer, es uno de sus defensores, el jesuita Sarassa (1618-1687), quien mencionará en su *Solutio Problematis a Mercenno Propositi* (1649), que " las áreas hiperbólicas pueden tener relación con los logaritmos" [10].

El descubrimiento del carácter logarítmico de las áreas hiperbólicas provocó una promoción de los logaritmos al rango de valor analítico, adquiriendo así un

[11]Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique.

carácter universal, en contraposición a lo local de los logaritmos de Briggs y motivó nuevos trabajos sobre áreas hiperbólicas, lo que a su vez preparó el camino para la introducción de algunos desarrollos en serie ([15], p.223).

### 5.2 El logaritmo a partir de las series

El cálculo de logaritmos por medio de series infinitas, se hizo más tarde gracias a James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) y Edmond Halley (1656-1742). La primera parte de la *Logarithmotechnia* de Mercator, trata del cálculo de los logaritmos por métodos que se derivan de los que utilizaron Napier y Briggs; la segunda parte contiene varias fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos, una de las cuales es esencialmente la que conocemos hoy como " serie de Mercator". Al utilizar de nuevo los conocimientos actuales, la idea de Mercator derivaba de que el área bajo la hipérbola $y = \dfrac{1}{1+x}$ desde $x = 0$ hasta $x = x$ es igual a $\ln(1+x)$, por lo tanto:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Mercator dio el nombre de logaritmos naturales a los valores que se obtenían a partir de esta serie. Aunque la serie lleve el nombre de Mercator, parece que la conocían ya antes que él, tanto Hudde (1629-1704) como Newton (1642-1727), pero no la publicaron. Brouckner y Gregory descubrieron también series infinitas para los logaritmos, pero éstas se vieron eclipsadas por la mayor simplicidad de la serie de Mercator.

La serie de Mercator es divergente para $x = -1$, lo que dio lugar a una polémica entre Bernoulli y Leibniz acerca de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. Para Bernoulli, creyendo que la curva logarítmica debía ser simétrica con respecto del eje de ordenadas, debía cumplirse que $\log(-x) = \log(x)$, punto de vista que parecía confirmado puesto que $\dfrac{d}{dx}\ln(-x) = \dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$. Leibniz, en cambio, consideraba que los logaritmos de los números negativos debían ser imaginarios.

## 6 El logaritmo como función

Es importante tener presente que muchas de las funciones estudiadas en el siglo XVII fueron primero examinadas como curvas, antes de que el concepto de función estuviera totalmente determinado. Esto ocurrió también en el caso de las funciones trascendentes elementales tales como $\log x$, $\operatorname{sen} x$ y $a^x$.

En 1646, entre los problemas que ocupaban a Torricelli (1608-1647), estaba uno en el que representa la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como

$x = \log y$, en la que es quizás la primera representación gráfica de una función logarítmica; Torricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje OX (Boyer, 2003). Sin embargo, su muerte en 1647 retrasa la difusión de la gráfica. Será Huygens (1629-1695) a quien corresponderá exponer sus propiedades en el *" Discurso sobre la causa de la gravedad"*, (1690). Huygens estaba interesado, desde 1651, por los logaritmos y su cálculo, en particular, la cuadratura de la hipérbola y retomó el problema mucho más tarde (1666), cuando participaba en los trabajos de la nueva Academia Real de Ciencias de París utilizando esta noción en cuestiones de probabilidad y de combinatoria.

La dificultad más importante con la que se encontró el desarrollo del Análisis Infinitesimal fue una idea de dependencia funcional, que permitiera aplicar a las distintas funciones las operaciones del nuevo cálculo. Por ello resultaba cada vez más necesario investigar el significado del concepto de función, dar una clasificación de todas las funciones conocidas y encontrar los medios para operar con ellas.

Ya Bernoulli (1667-1748) propone en 1718[12], considerar que una función es una expresión analítica [23]. Posteriormente, Euler (1707-1783) escribió su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que está dedicada al estudio de las funciones, a su clasificación, propiedades, métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples. Así, Euler da la siguiente definición de función: " Functio quantitatis variabilis, est esspressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus"[13] ([13], p. 4).

Euler admite tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias, las raíces y las soluciones de ecuaciones algebraicas. A ellas, Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: $e^z$, $\ln z$ y las funciones trigonométricas ([13], p.5). Así mismo, Euler, definió las funciones polinómicas, las trigonométricas y las exponenciales: *" Potestas quantitatis constantes a, Exponentem haben variabilem z"*[14] ([13], p. 70).

Para añadir, a continuación, refiriéndose a las funciones exponenciales ([13], p. 73):

> dato valorem quocunque afirmativo ipsius y, conveniens datibur valor pisius z, ut fit $a^z = y$; iste autem valor ipsius $z$, quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, ocari solet LOGARITHMUS ipsius y[15] .

[12]Esta idea aparece impresa en un trabajo sobre el problema isoperimétrico en la Academia Real de Ciencias de París

[13]Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes

[14]Potencia de la cantidad constante $a$, que tiene por exponente la variable $z$.

[15]Dado un valor afirmativo cualquiera de $y$ vendrá dado el valor de $z$ conveniente para que

En su obra, Euler introduce así el logaritmo como función inversa de la exponencial. También enuncia Euler su " regla de oro para los logaritmos", la cual afirma que si hemos calculado $\log_a y$, entonces se puede calcular $\log_b y$, siendo $b$ cualquier otra base mediante la fórmula:

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Además, establece que los logaritmos de los números negativos no son reales, sino imaginarios y que tendrán un número infinito de éstos. Partiendo de la fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y sustituyendo $\theta$ por $\pi$, resulta que $e^{i\pi} = -1$, con lo que $\ln(-1) = i\pi$. Además, cualquier número positivo o negativo tiene no sólo un logaritmo sino infinitos.

## 7 Conclusión

La revisión de la evolución del concepto de logaritmo y función logarítmica, nos ha permitido caracterizar diferentes etapas en el desarrollo matemático del concepto. Así, en un primer momento se plantea la relación entre los términos de una progresión geométrica y los correspondientes términos en la progresión aritmética, sin que emerja aún ningún concepto. Se presenta luego la etapa en donde se nomina el nuevo concepto y, desprendiéndose de la mirada en las progresiones discretas, se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo.

El no cumplimiento, en todos los casos, de la equivalencia del logaritmo de un cociente y producto, a la diferencia o suma de los logaritmos, se encuentra superado en la etapa siguiente que se caracteriza por cambios que conllevan la aceptación de las igualdades $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$, y la utilización de 10 como base de los logaritmos, situación que se traduce en un esquema de logaritmo con propiedades explícitas como las actuales. Se generaliza la idea y se define el concepto de logaritmo como exponente, viendo en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, lo cual hace posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos.

Finalmente, se llega a una de las principales etapas del desarrollo matemático del concepto, puesto que el estudio del logaritmo como área bajo la curva y, a través de series, elevó el concepto de logaritmo al rango de valor analítico. Esta etapa y el desarrollo del Análisis, dan paso a la introducción de los logaritmos en el ámbito de las funciones trascendentes como última etapa en la que nos detenemos en este recorrido.

**Agradecimientos** Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación "Análisis de la Práctica del Docente Universitario de Matemáticas Aplicadas. Es-

sea $a^z = y$; este valor de $z$ contemplado en cuanto función de $y$, se llama LOGARITMO de $y$.

tudios de casos en la enseñanza de la función logarítmica y exponencial" de la Universidad Colegio Mayor Cundinamarca, Colombia y en el programa de doctorado " Educación Matemática" de la Universidad de Salamanca, España.

**Referencias**

[1] Ausejo, E.: Historia de la Ciencia y de la Tecnica 17, Las matemáticas en el siglo XVII, Ediciones Akal, S.A., Torrejón de Ardoz. Madrid, (1992), 29-31.

[2] Bell, E. T.: Historia de las Matemáticas, Traducción de R. Ortiz, Fondo de Cultura Económica. México, D. F., 2000.

[3] Boyer, C.: Historia de la matemática, Versión de Mariano Martínez Pérez, Alianza Editorial, Madrid, 2003.

[4] Cajori, F.: A history of Mathematical Notations, Two volumes Bound as one, Dover Publications, New York, (1993), 105-115.

[5] Colerus, E.: Breve historia de las matemáticas, Vols. 1 y.2. Madrid: Altamira Rotopress, S.A., 1972.

[6] Chica, A.: Descartes Geometría y método, Colección: La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2001.

[7] Collette, J. P.: Historia de las matemáticas, Siglo XXI Ed., Madrid, 1985.

[8] Confrey, J. y Smith, E.: Multiplicative Structures and the Development of Logarithms: What Was Lost by the Invention of Function? En Harel, G y Confrey, J. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. (1994), 331-360.

[9] Dennis, D. y Confrey, J.: La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis, Relime, 3, 1, (2000), 5-31.

[10] Dunham, W.: Euler. El maestro de todos los matemáticos 6, La matemática en sus personajes, Nivela, Madrid, 2000.

[11] Durán, A.: Historia, con personajes de los conceptos del cálculo, Alianza Editorial, Madrid, (1996), 235-280

[12] Edwards, C.H.: The historical development of the calculus, Springer, New York, 1979.

[13] Euler, L.: Introductio in Analysin infinitorum Lausanne: Marcum Michaelem Bousquet y socios, (Edición facsimil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española), 1748.

[14] González, P.: Pitágoras. El filósofo del número, 9. La matemática en sus personajes, Nivela, Madrid, 2001, 189

[15] González, P.: Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo VII, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[16] Katz, V.: Napier's logarithms adapted for today' s classroom. F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (eds.), Mathematical Association of America, Learn from the masters Washington, D C:, (1995), 49-56.

[17] Knott, (ed.): Napier tercentenary memorial volume, Longmans, London, (1915), 1-32.

[18] Kline, M.: Mathematical Thought form ancient to modern times, V. 1, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[19] Lefort, X.: Historia de los logaritmos. Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas. Documentos de Historia de las Ciencias. http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/penelope/es_conflefort.htm

[20] Millán, A.: Euclides. La fuerza del razonamiento matemático. 19, La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2004.

[21] Moulton, L.: The invention of logarithms, its genesis and growth. C. Knott (ed.), Napier memorial volume, Longmans, London, (1915), 1-32.

[22] Ribnikov, K.: Historia de las Matemáticas, Editorial Mir, Moscú, 1991.

[23] Sánchez, C, y Valdés, C.: Los Bernoulli. Geómetras viajeros, Colección: La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2001.

[24] Smith, D.E.: A source book in mathematics, reimpresión de la edición de 1929, 2 tomos, Dover, Nueva Cork, 1959.

[25] Torija, R.: Arquímedes Alrededor del círculo, Colección: La matemática en sus personajes, Segunda Edición, Nívola, Madrid, 2003.

[26] Wieleitner, H.: Historia de las Matemáticas, Editorial Labor, S.A., Barcelona, 1932

[27] Wussing, H.: Lecciones de Historia de las Matemáticas. Siglo XXI Editores, S. A., Zaragoza, (1989), 108-114.

*Dirección de los autores*
María Teresa González Astudillo — Universidad de Salamanca, España
e-mail: `maitega@gmail.com`
Jeannette Vargas Hernández — Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Colombia
e-mail: `jeannettevargash@gmail.com`